

Proportionnalité

1 Situations de proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre non nul, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

A la boulangerie, chaque bonbon coute 0,15 €, on a donc :

prix à payer = nombre de bonbons achetés $\times$ 0,15

Le prix à payer est **proportionnel** au nombre de bonbons achetés.

0,15 est le coefficient de proportionnalité.

Par exemple, avec 1,50 €, on peut acheter 10 bonbons (car $1,50 = 10 \times 0,15$).

Remarque

On peut représenter la situation dans un tableau en y rassemblant les grandeurs étudiées.

Pour l'exemple précédent, on aurait pu construire le tableau suivant :

Nombre de bonbons	1	2	3	10
Prix (en €)	0,15	0,30	0,45	1,50

Ce tableau est appelé **tableau de proportionnalité**.

Le quotient d'une ligne par une autre ligne est toujours égal au coefficient de proportionnalité.

Exemple

Dans le chapitre précédent, les lignes **effectifs** et **fréquences** d'un tableau de données sont toujours **proportionnelles** !

Exemple

On a relevé dans le tableau ci-dessous la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

Temps écoulé (en jours)	1	7	365
Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68

$\times 0,432$

On calcule les quotients : $\frac{0,432}{1} = 0,432$; $\frac{3,024}{7} = 0,432$; $\frac{157,68}{365} = 0,432$.

Tous les quotients sont égaux à 0,432, donc le tableau est un tableau de proportionnalité :

- La quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé.
- 0,432 est le coefficient de proportionnalité.

Exemple

Angélique et Claire achètent respectivement un pack de 6 litres de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 litres à 6,48 €.

On récapitule ces résultats dans le tableau ci-dessous :

Jus d'orange (en L)	6	4
Prix à payer (en €)	9,12	6,48

On calcule les quotients : $\frac{9,12}{6} = 1,52$; $\frac{6,48}{4} = 1,62$.

Les quotients ne sont pas égaux, ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité :

- Le prix à payer n'est pas proportionnel à la quantité de jus d'orange achetée.
- Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

2 Quatrième proportionnelle

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, lorsque l'on ne connaît que trois valeurs, on peut calculer la quatrième valeur, appelée **quatrième proportionnelle**.

Propriété: Méthode 1 : à l'aide du coefficient de proportionnalité

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on peut utiliser le coefficient de proportionnalité pour passer d'une ligne à l'autre.

Exemple

Marie fait le plein d'essence de son scooter dont le réservoir a une contenance de 5,5L. La station-service affiche un prix de l'essence à 1,22 € le litre.

1. Combien va-t-elle payer son plein d'essence ?
2. Quelle quantité d'essence peut-elle acheter avec 5 € ?

On construit le tableau de proportionnalité suivant :

$\div 1,22$	Quantité d'essence achetée (en L)	1	5,5	?
	Prix à payer (en €)	1,22	?	5
				$\times 1,22$

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée et le coefficient de proportionnalité est égal à 1,22. Marie va donc payer son plein d'essence $5,5 \times 1,22 = 6,71$ €.

Avec 5 €, Marie peut acheter $5L \div 1,22$ soit environ 4,1L.

Propriété: Méthode 2 : liens entre les colonnes

Pour obtenir les nombres d'une colonne dans un tableau de proportionnalité, on peut :

- **Multiplier ou diviser** les nombres d'une autre colonne par un même nombre.
- **Ajouter ou soustraire** les nombres de deux autres colonnes.

Exemple

Une recette de crêpes indique qu'il faut 300g de farine pour cuisiner 12 crêpes.

1. Quelle quantité de farine faut-il pour cuisiner 4 crêpes ?
2. Quelle quantité de farine faut-il pour cuisiner 16 crêpes ?

La quantité de farine à utiliser est proportionnelle au nombre de crêpes à cuisiner, on peut donc faire un tableau de proportionnalité :

Nombre de crêpes	12	4	16
Quantité de farine (en g)	300	?	?

1. Pour faire 4 crêpes, il faut utiliser $300 \text{ g} \div 3$, soit 100 g de farine.
2. Pour faire 16 crêpes, il faut utiliser $300 \text{ g} + 100 \text{ g}$, soit 400 g de farine.

Propriété: Méthode 3 : passage par l'unité

Pour traiter une situation de proportionnalité, il est parfois plus judicieux de revenir à l'unité.

Exemple

Clara a acheté 3 cahiers pour 3,60 €. Emma a besoin de 7 cahiers. Combien devra-t-elle payer ?
 3 cahiers coutent 3,60 €, donc 1 cahier coûte $\frac{3,60}{3} = 1,20$ €. Ainsi, 7 cahiers coutent $\frac{3,60}{3} \times 7 = 1,20 \times 7 = 8,40$ €.

Nombre de cahiers	3	7
Prix (en €)	3,60	?

3 Calculer un pourcentage

Propriété

Soit x un nombre positif.

Calculer x % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{x}{100}$.

Exemple

Dans un pot de crème fraîche de 20 cL, il y a 12 % de matière grasse.

$$12 \% \text{ de } 20 = \frac{12}{100} \times 20 = 2,4$$

La quantité de matière grasse dans le pot est égale à 2,4 cL.

Exemple

Un article coûte 89 €. Son prix est réduit de 20 %.

La réduction est de 20 % de 89 € = $\frac{20}{100} \times 89 = 17,80$

Le nouveau prix sera donc $89 - 17,80 = 71,20$ €.

Remarque

Un pourcentage exprime une proportion par rapport à 100, il peut s'écrire sous plusieurs formes :

15 % (pourcentage) = $\frac{15}{100}$ (écriture fractionnaire) = 0,15 (écriture décimale)

Pour **calculer un pourcentage**, on peut utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemple

Une automobile qui coûtait 8000 € est vendue 6800 €. A quel pourcentage du prix initial correspond la remise ?

Pourcentage	100	?
Prix (en €)	8000	6800

? = $6800 \div 80 = 85$, l'article est vendu à 85 % du prix initial.

Exemple: A l'aide d'un tableau de proportionnalité

Dans une classe de 23 élèves de 3^e, 15 élèves connaissent leur orientation scolaire pour l'année suivante. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut représenter cette situation par un tableau de proportionnalité :

$\div \frac{23}{15}$	<table> <tr> <td>Nombre d'élèves connaissant leur orientation</td><td>15</td><td>?</td></tr> <tr> <td>Nombre d'élèves dans la classe</td><td>23</td><td>100</td></tr> </table>	Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?	Nombre d'élèves dans la classe	23	100	$\times \frac{23}{15}$
Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?						
Nombre d'élèves dans la classe	23	100						

La proportion d'élèves connaissant leur orientation est de environ 65,2%.

4 Carte mentale

