Fractions, propriétés des quotients

1 Notions de fractions

Définition: Fraction

Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$.
Dans la **fraction** $= \frac{a}{b}$, le **numérateur** est a et le **dénominateur** est b.
On dit aussi que $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b. C'est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

Exemple

Dans la fraction $\frac{5}{4}$, 5 est le numérateur et 4 est le dénominateur.
Le quotient de 2 par 3 est $\frac{2}{3}$. C'est le nombre qui multipié par 3 donne 2. Autrement dit : $3 \times \frac{2}{3} = 2$.

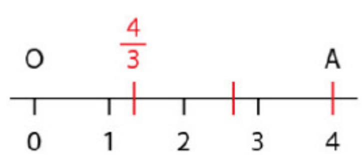
Remarque

$\frac{a}{b}$ est le nombre manquant dans l'égalité $b\times\ ? = a$.
C'est une autre façon d'écrire $a \div b$.

Exemple

On veut placer le nombre $\frac{4}{3}$ sur une droite graduée.

1. On peut déterminer une valeur approchée de $\frac{4}{3}$. On a $\frac{4}{3} = 4 \div 3 \approx 1,33$.
2. On peut également placer le point A d'abscisse 4 et partager le segment $[OA]$ en 3 parties égales.



2 Reconnaître des fractions égales

Propriété

Un quotient ne change pas si l'on **multiplie** ou si l'on **divise** son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul.
Si a, b, k désignent trois nombres avec $b \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple

$$\frac{3}{4} = \cdots = \frac{15}{20} \qquad \frac{10}{25} = \cdots = \frac{2}{5}$$

Définition

Simplifier une fraction consiste à écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Propriété

Pour simplifier une fraction, on effectue les étapes suivantes :

1. On cherche si le numérateur et le dénominateur appartiennent à une même table de multiplication.
2. Si non : on ne peut pas simplifier la fraction. Si oui, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par l'élément trouvé à l'étape 1.
3. Si on a simplifié à l'étape 2, on retourne à l'étape 1.

Exemple

Simplifions la fraction $\frac{42}{63}$:
42 et 63 appartiennent à la **même** table de multiplication, en effet, ils appartiennent à la table de 7. On peut donc **diviser numérateur et dénominateur** par 7. On a $\frac{42}{63} = \ldots\ldots$

Exemple

$$\frac{12}{28} = \ldots \qquad \frac{45}{35} = \ldots$$

$$\frac{63}{81} = \ldots \qquad \frac{110}{132} = \ldots$$

Remarque: Astuces

A. $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$

B. $\frac{4}{1} = 4 \qquad \frac{6}{1} = 6 \,, \qquad \frac{17}{1} = 17$

C. $2,8 = \frac{28}{10}, \qquad 3,65 = \frac{365}{100}, \qquad 4,001 = \frac{4001}{1000}$

3 Comparer des fractions

Propriété

Soient a, b, et c trois nombres avec $c > 0$.
Si deux quotients ont le **même dénominateur**, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur : si $a < b$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Exemple

$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$ car $3 < 5$

Propriété

Pour comparer deux fractions de dénominateurs différents, on peut les réduire au même dénominateur.

Exemple

On veut comparer $\frac{7}{3}$ et $\frac{13}{6}$.
On peut écrire : $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}$
Or, $14 > 13$, donc $\frac{14}{6} > \frac{13}{6}$, donc $\frac{7}{3} > \frac{13}{6}$

4 Opérations sur les fractions

4.1 Si les dénominateurs sont égaux

Propriété

Lorsqu'on additionne deux fractions qui ont le **MÊME DENOMINATEUR**, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.
Lorsqu'on soustraie deux fractions qui ont le **MÊME DENOMINATEUR**, on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur.

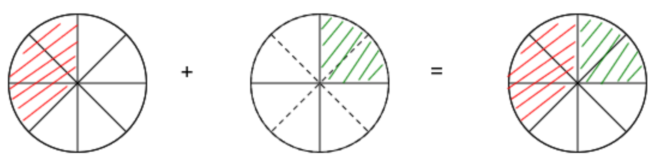
Exemple

1. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$
2. $\frac{5}{8}+\frac{12}{8}=\frac{5+12}{8}=\frac{17}{8}$
3. $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$
4. $\frac{15}{26}-\frac{8}{26}=\frac{15-8}{26}=\frac{7}{26}$

4.2 Si les dénominateurs sont multiples l'un de l'autre

Exemple

Combient vaut $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$?



Ainsi, $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$ et PAS $\frac{5}{16}$.

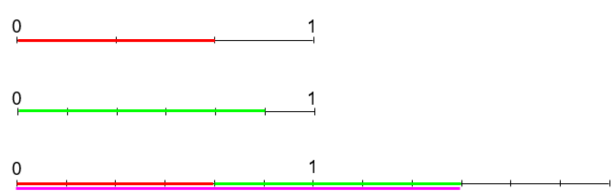
Remarque: Attention !

On ne peut pas additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Alors, on les met au même dénominateur !

Exemple

Combient vaut $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$? Deux méthodes

1. On utilise la droite graduée



Grâce à la droite graduée, on obtient donc que : $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

2. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2\times2}{3\times2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$