

Nombres entiers

1 Diviseurs d'un nombre entier

Définition

Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

Exemple

1, 3, 0, 6 873 261 sont des entiers naturels.

Définition

Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier a par un nombre entier b différent de 0, c'est trouver deux nombres entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$
 a s'appelle le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.

Exemple

La division euclidienne de 377 par 12 :

dividende → 377
 - 36
 17
 - 12
 5
 reste → 5

diviseur ← 12
 quotient ← 31

$377 = 12 \times 31 + 5$ avec $5 < 12$

Définition

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$:

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste **nul**, on dit que :

- a est un **multiple** de b ;
- b est un **diviseur** de a ;
- a est **divisible** par b .

Exemple

1. 20 est un multiple de 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20.
2. On peut aussi dire que 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20 sont des diviseurs de 20.
3. On dit aussi que 20 est divisible par 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20.

Remarque

Lorsqu'on trouve que le reste de la division de est nul, on peut l'écrire sous forme de fraction.

Par exemple $15 = 3 \times 5 + 0$, donc $\frac{15}{5} = 3$, et $\frac{15}{3} = 5$.

Exemple

La division euclidienne de 85 par 17 donne : $85 = 17 \times 5 + 0$, le reste est nul. On dit que :

- 85 est un multiple de 17 et de 5 ;
- 5 et 17 sont les diviseurs de 85 ;
- 85 est divisible par 17 et par 5.

Remarque

0 ne divise aucun nombre.
Tout nombre est un multiple de 1 .
Tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

2 Critères de divisibilité

Propriété

1. Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
2. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
3. Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
4. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
5. Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.

Exemple

1. 138 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 8, c'est un nombre pair.
2. 186 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est égale à 15, qui est divisible par 3.
3. 175 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
4. 936 est divisible par 9 car la somme de ses chiffres est égale à 18, qui est divisible par 9.
5. 220 est divisible par 10 car son chiffre des unités est 0.

3 Nombre premier

Définition

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

1. 6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme diviseurs.
2. 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarque

Il existe une infinité de nombres premiers.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Propriété

Liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Propriété: Décomposition en produit de facteurs premiers

On peut décomposer chaque entier naturel supérieur ou égal 2 en produits de facteurs premiers. On divise le nombre à décomposer autant de fois que possible par 2, puis par 3, par 5, par 7, par 11, etc, en suivant la liste des nombres premiers successifs.

Exemple

1. $20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.
En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.
2. $231 = 3 \times 7 \times 11$
3. $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

4 Applications des nombres premiers aux fractions

Propriété

Pour simplifier une fraction, on décompose son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple

Simplifier la fraction $\frac{36}{42}$:

1. On décompose 36 en produit de facteurs premiers : $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
2. On décompose 42 en produit de facteurs premiers : $42 = 2 \times 3 \times 7$
3. On simplifie : $\frac{36}{42} = \frac{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 7} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$

Exemple

Simplifier la fraction $\frac{153}{85}$:

1. On décompose 153 en produit de facteurs premiers : $153 = 3 \times 3 \times 17$
2. On décompose 85 en produit de facteurs premiers : $85 = 5 \times 17$
3. On simplifie : $\frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{17}}{5 \times \cancel{17}} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$

5 Carte mentale

