Synthèse PSE

PROBABILITÉS

Définitions

On cherche à décrire une expérience aléatoire.

- La variable aléatoire, notée X, donne le *résultat* de l'expérience.
- La loi de probabilités, notée $\mathcal{L}_X$, *décrit* l'expérience (avant son résultat).
  On note $\mathcal{L}_X := \{\mathbb{P}(X = k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$.
- La fonction génératrice de l'expérience est définie par la série entière

$$G_X(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$$

  La fonction génératrice caractérise la loi : $G_X = G_Y \Leftrightarrow \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$.

Propriétés

- Si X et Y sont indépendants, alors

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y$$

  Par identification, cette propriété permet de calculer la loi de $X + Y$.
- On a $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$ & $\text{Var}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

SÉRIES ENTIÈRES

Définitions

Une série entière (SE) est une fonction qui donne une série de la forme

$$f \ : \ x \longmapsto \sum_n a_n x^n, \qquad x \in]-r, r[.$$

On peut aussi la voir comme une série à paramètre particulière.

On choisit $r \geq 0$ tel que :

- $\sum_n a_n x^n$ CV absolument sur $]-r, r[$,
- $\sum_n a_n x^n$ DV grossièrement si $|x| > r$.

on appelle r le rayon de convergence et $]-r, r[$ son intervalle de convergence.

Propriétés

- Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longmapsto l \in \bar{\mathbb{R}}_+$, alors $r = \frac{1}{l}$ (critère de d'Alembert pour les SE)
- Sur $]-r, r[$, la SE f est dérivable et

$$f'(x) = \sum_n n a_n x^{n-1} = \sum_n (n+1) a_{n+1} x^n.$$

- Sur $]-r, r[$, la SE f est intégrable et

$$F(x) = \sum_n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_n \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Séries entières de référence

Quand on est face à une SE dont on ne connait pas la fonction f associée, on essaye de s'approcher d'une des deux SE de référence, ou de leur famille (dérivée / primitive / transformations simples).

Série	Géométrique $\mathcal{G}$	Exponentielle $\mathcal{E}$
SE	$\sum_n x^n$	$\sum_n \frac{1}{n!}x^n$
rayon r	1	$+\infty$
fonction f	$\frac{1}{1-x}$	e^x

Lois de probabilités de référence

Ces SE permettent d'étudier des phénomènes aléatoires qui peuvent prendre une infinité de valeurs.

Loi	Géométrique $\mathcal{G}(p)$	Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
Application	nb essais avant succès	nb évènements dans un intervalle
$\mathbb{P}(X=n)$	$p(1-p)^{n-1}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$
$G_X(t)$	$\frac{pt}{1-qt}$	$e^{\lambda(t-1)}$
$\mathbb{E}$	$\frac{1}{p}$	λ
Var	$\frac{q}{p^2}$	λ
Propriété		$\mathcal{P}(\lambda) \overset{\perp\!\!\!\perp}{+} \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Attention :

- $\mathcal{G}(p)$, on a $n \geq 1$ et on note $q = 1-p$.
- $\mathcal{P}(\lambda)$, la propriété suppose l'indépendance de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

EXERCICE

Démontrer les résultats donnés dans le deuxième tableau.
(Faire Ex 3.15 + 3.18 + 3.19)