Synthèse ASN

Notations

On considère la série (S_n) de terme général u_n, notée $\sum u_n$.
On peut interpréter S_n comme *le compte en banque* et u_n comme *le revenu*.

On dit que la série converge (CV) si (S_n) a une limite finie.
Sinon on dit que la série diverge (DV).

Séries de référence

- Série géométrique : $\sum q^n$ CV $\Leftrightarrow$ $-1 < q < 1$
- Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
  En particulier, $\sum \frac{1}{n^2}$ CV et $\sum \frac{1}{n}$ DV
- Série alternée : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV

Rédaction

Lorsqu'il faut déterminer la nature d'une série, la rédaction doit comporter 3 ou 4 étapes.

Par exemple, avec le terme général $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1. **Calculs préliminaires :** On a, grace au développement limité
$$\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right).$$
2. **Hypothèses du critère :** Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$, et u_n (ou $\frac{1}{n}$) est à termes positifs.
3. **Critère & son résultat** Donc d'après le *critère d'équivalence*, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature.
4. **Série de référence & conclusion :** Or $\sum \frac{1}{n}$ DV, donc $\sum u_n$ DV.

Ou par exemple, avec le terme général $v_n = \frac{n!}{n^n}$

1. **Calculs préliminaires :** On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1) \times \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \longmapsto e^{-1}.$$
2. **Hypothèses du critère :** Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \mapsto e^{-1} < 1$, et u_n est à termes positifs.
3. **Critère & son résultat** Donc d'après le *critère de d'Alembert*, $\sum u_n$ CV.

Stratégies de preuve

Pour montrer que $\sum u_n$ CV ou DV, on a plusieurs techniques.
Attention ! Les techniques en bleu nécessitent que $u_n \geq 0$, mais elles existent aussi en version $u_n \leq 0$.

- La divergence grossière

$$\text{Si } u_n \nrightarrow 0, \quad \text{alors } \sum u_n \text{ DV}$$

- Les opérations algébriques

$$\begin{gathered}\text{CV + CV = CV}\\ \text{CV + DV = DV}\\ \text{DV + DV = indéterminée} \quad (\text{DV si } u_n, v_n \geq 0)\end{gathered}$$

- Le critère de comparaison

$$\begin{gathered}\text{Si } u_n \leq v_n, \quad \text{alors } \sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}\\ \text{Si } u_n \leq v_n, \quad \text{alors } \sum u_n \text{ DV} \Rightarrow \sum v_n \text{ DV}\end{gathered}$$

- Le critère d'équivalence

$$\text{Si } u_n \sim v_n, \quad \text{alors } \sum v_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ CV}$$

  - Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n \geq 0 \Leftrightarrow v_n \geq 0$ à partir d'un certain rang.
  - Ce critère est très puissant lorsque combiné aux DL !

- La règle de d'Alembert

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \mapsto l \in \bar{\mathbb{R}}_+, \quad \text{alors } \sum u_n, \quad \text{CV si } l < 1 \quad \& \quad \text{DV si } l > 1$$

  - Ce critère est souvent utile quand u_n contient des factorielles comme $n!$.

- La règle de Cauchy

$$\text{Si } \sqrt[n]{u_n} \mapsto l \in \bar{\mathbb{R}}_+, \quad \text{alors } \sum u_n, \quad \text{CV si } l < 1 \quad \& \quad \text{DV si } l > 1$$

  - Ce critère est souvent utile quand u_n contient des puissance n-ième X^n.

- Le critère des séries alternées

$$\text{Si } u_n = (-1)^n a_n \text{ avec } a_n \text{ décroissante et } a_n \mapsto 0, \quad \text{alors } \sum u_n \text{ CV}$$

- Le critère de convergence absolue

$$\text{Si } \sum |u_n| \text{ CV}, \quad \text{alors } \sum u_n \text{ CV}$$

  - Souvent on applique d'abord les critères bleus à $\sum |u_n|$, puis on applique le CCA pour en déduire que $\sum u_n$ CV.

Rappels SUP

- $u_n = o(v_n)$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \mapsto 0$, c'est-à-dire "$u_n$ *va plus vite vers 0 que* v_n".
- $\frac{1}{n^3} = o(\frac{1}{n^2})$, $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$, $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = o(1)$.
- Si $n \sim 0$, alors $u_n = 0$.
- Attention ! $u_n \sim v_n$ n'implique pas que $f(u_n) \sim f(v_n)$.
  Par exemple

$$n \sim n+1, \qquad \text{pourtant} \qquad \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \nrightarrow 1.$$