Révisions AL

Woessner Guillaume

Contexte

On travaille sur les applications linéaires suivantes.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z\ ;\ -2x-2z\ ;\ -3x+2y-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & P & \longmapsto & \Big((XP)(2)\ ;\ (XP)'(2)\Big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P'(0) & P(0)+P'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} i: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P - \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 \end{array}$$

Soient les bases alternatives suivantes.

- dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_1 = \Big((1,1)\ ;\ (1,-1)\Big)$.
- dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_2 = \Big((1,1,1)\ ;\ (1,-1,0)\ ;\ (2,0,0)\Big)$.
- dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{B}_3 = \Big(X^2-1\ ;\ X-1\ ;\ -1\Big)$.

Soient les vecteurs-exemples suivants.

- dans $\mathbb{R}^2$: $u = (4,-5)$.
- dans $\mathbb{R}^3$: $v = (3,0,-3)$.
- dans $\mathbb{R}_2[X]$: $w = 1+2X+X^2$.

Questions

1. Trouver les coordonnées des vecteurs-exemples dans leur base altenative.

2. Quels sont les vecteurs de coordonnées $(1, 2)$ (resp. $(1, 2, 3)$) dans les bases alternatives des espaces de dimension 2 (resp. de dimension 3) ?

3. Trouver le rang, la dimension du noyau de chacune de ces applications linéaires et trouver une base pour l'image et le noyau de chacune des applications linéaires.

4. Trouver la matrice de chacune des applications linéaires, dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

5. Trouver la matrice de l'application f dans la base alternative au départ, et la base canonique à l'arrivée.

6. Trouver la matrice de l'application g dans la base canonique au départ, et la base alternative à l'arrivée.

7. Trouver la matrice de l'application i dans la base alternative au départ, et la base alternative à l'arrivée.

8. Les applications sont-elles des projecteurs ?

9. Trouver le polynome caractéristique des endomorphismes.

10. Diagonaliser les endomorphismes.