Exercice 4.19

Woessner Guillaume

Question 1
Il s'agit des fonctions

$$\Big(x(t)\ ;\ y(t)\Big) = \Big(x_0e^{-t}\ ;\ y_0e^{-4t}\Big)$$

Question 2
Remarque préliminaire : A priori on ne sait pas résoudre ce système d'équations. On va voir que la diagonalisation d'endomorphismes nous permettra de le faire quand même.

A. On a que

$$\mathcal{B}_2 = \Big((2,-1)\ ;\ (1,1)\Big) := (\epsilon_1, \epsilon_2)$$

et

$$f(\mathcal{B}_2) = \Big((-2,1)\ ;\ (-4,-4)\Big) = \Big(-\epsilon_1\ ;\ -4\epsilon_2\Big)$$

Donc la matrice est de la forme

$$D := \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

B. On a bien $u'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x(t) - 2y(t) \\ -x(t) - 3y(t) \end{pmatrix} = f(u(t))$.
La vitesse du vecteur $u(t)$ dans un petit intervalle autour de 0 vaut $u'(0) = f(u(0))$.

C. Il s'agit d'écrire la relation $u'(t) = f(u(t))$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
Celle-ci devient

$$X_2'(t) = DX_2(t). \tag{1}$$

D. Cette fois-ci l'équation (**??**) est résolvable avec nos outils du S2 ! Il s'agit de la même équation que dans la **Question 1**. On a donc

$$X_2(t) = \Big(C_1e^{-t}\ ;\ C_2e^{-4t}\Big).$$

Il faut encore trouver la valeur des constantes C_1 et C_2.
Or on sait que $(C_1, C_2) = X_2(0) = \big(u(0)\big)_{\mathcal{B}_2}$, c'est-à-dire **les coordonnées de $u(0) = (x_0\ ;\ y_0)$ dans la base $\mathcal{B}_2$!**
En notant $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a d'après le cours que $X_2(0) = P^{-1}X_1(0) = P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_0 - y_0) \\ \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0) \end{pmatrix}$.
On conclut que

$$X_2(t) = \Big(\tfrac{1}{3}(x_0 - y_0)e^{-t}\ ;\ \tfrac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^{-4t}\Big).$$

Et donc

$$\begin{aligned} u(t) &= X_1(t) \\ &= PX_2(t) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\Big(\tfrac{1}{3}(x_0 - y_0)e^{-t}\ ;\ \tfrac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^{-4t}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(x_0 - y_0)e^{-t} + \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^{-4t} \\ \frac{1}{3}(x_0 - y_0)e^{-t} + \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^{-4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que $u(0) = (x_0, y_0)$ pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompés.

E. Dans une équation linéaire, $f(0) = 0$ donc 0 est forcément un point d'équilibre.
De plus, la solution $u(t)$ est la forme $M\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$, pour une certaine matrice M, et les exponentielles ont des exposants négatifs, donc les trajectoires se rapprochent de zéro et le point d'équilibre est stable.
Enfin, j'affirme que la matrice M au dessus est de la forme $P\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$, peux-tu expliquer pourquoi ?

Conclusion : Grace au changement de base, on a pu se placer dans une base dans laquelle on pouvait résoudre le système, puis retourner à notre base canonique initiale pour avoir l'expression de la solution.