Exo 8, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Les familles U.I. et les processus de branchement.

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$, et on supposera que $(X_n)_n$ est une martingale adaptée à la filtration.

Exercice 1 Supposons qu'il existe un $p > 1$ tel que $\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty$.
Montrez que $(X_n)_n$ est UI.

Proof. On peut calculer que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>K_\varepsilon}] &= \mathbb{E}\left[|X_n|^p \frac{\mathbf{1}_{|X_n|>K_\varepsilon}}{|X_n|^{1-p}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n|^p \frac{\mathbf{1}_{|X_n|>K_\varepsilon}}{K_\varepsilon^{1-p}}\right] \\ &= \frac{1}{K_\varepsilon^{1-p}}\,\mathbb{E}[|X_n|^p\mathbf{1}_{|X_n|>K_\varepsilon}] \leq \frac{\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p}{K_\varepsilon^{1-p}}\end{aligned}$$

Ainsi choisir K_ε de telle sorte que $\varepsilon = \dfrac{\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p}{K_\varepsilon^{1-p}}$ fait l'affaire. ■

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire intégrable.
Montrez que la famille $(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \ :\ \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une sous-tribu), est UI.
Indication : Vous pouvez utiliser le lemme suivant :
Si X est intégrable, alors il existe $h \ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, convexe et croissante vérifiant $\lim_{x\mapsto\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty$ telle que $\mathbb{E}[h(X)] < \infty$.

Proof. Soit h donnée par le Lemme. Ainsi on calcule

$$\mathbb{E}[h(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X) \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[h(X)] < \infty.$$

Un raisonnement analogue à celui de l'Exercice 1 permet alors de conclure. ■

Preuve du Lemme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on sait qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{|X|>a_n}] \leq \frac{1}{n^2}$, et on peut supposer sans perte de généralité que (a_n) forme une suite croissante qui tend vers l'infini.
On pose alors

$$g(x) := \sum_n |x|\mathbf{1}_{|x|>a_n} \qquad \text{et} \qquad h(x) := \sum_n (x - a_n)^+.$$

On remarque facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $h(x) \leq g(x) < \infty$. De plus, étant une somme de fonctions convexes continues et croissantes, h est également convexe continue et croissante. Enfin on peut aussi montrer que $\lim_{x\mapsto\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty$.
Alors on calcule

$$\mathbb{E}[h(|X|)] \leq \mathbb{E}[g(|X|)] = \mathbb{E}\left[\sum_n |X|\mathbf{1}_{|X|>a_n}\right] = \sum_n \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{|X|>a_n}] \leq \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

■

Exercice 3 Preuve alternative du fait que la population s'éteint dans le cas $R < 1$.

- Revisitez la preuve de convergence p.s. des martingales, et vérifiez que $\mathbb{E}[X_\infty] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n]$
- Dans la preuve du théorème de Galton-Watson, montrez que (avec les notations de la preuve), si $R < 1$, alors on a $\lim_n \mathbb{E}[X_n]$, $\mathbb{E}[X_\infty] = 0$ et $X_\infty = 0$.

Proof. Pour le premier point il suffit d'utiliser le lemme de Fatou.
Pour le second point on remarque que $M_n = \frac{X_n}{R^n}$ est une martingale et que par conséquent

$$\mathbb{E}[X_n] = R^n\,\mathbb{E}[M_n] = R^n\,\mathbb{E}[M_0] = R^n \mapsto 0.$$

On conclut en utilisant le premier point. ■

Exercice 4 Fin de la preuve du théorème de Galton-Watson dans le cas $R > 1$.
On veut montrer que la probabilité d'extinction (notée $1 - p$ dans le cours) est égale à la plus petite solution q_0 de $g(z) = z$, où $g(z) = \mathbb{E}(z^Y)$ où Y est la loi de régénération pour un processus de branchement. Pour ce faire

- Montrez que $\mathbb{P}(X_n = 0) = g(g \dots g(0))$ où on applique g exactement n fois, e.g. $\mathbb{P}(X_1 = 0) = g(0)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = g(g(0))$ etc...
- Argumentez que $1 - p = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$
- En utilisant la monotonicité de g, montrez que $1 - p = q_0 < 1$.

Proof. On procède comme suit :

- On raisonne par récurrence. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents, et on suppose alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X_n = 0) = g^n(0)$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \sum_k \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k) \\
&=^\star \sum_k \mathbb{P}(X_n = 0)^k \mathbb{P}(Y = k) \\
&= \sum_k g^n(0)^k \mathbb{P}(Y = k) \\
&= g \circ g^n(0) = g^{n+1}(0).
\end{aligned}$$

- Comme $(\{X_n = 0\})_n$ est une famille croissante d'évènements, on peut écrire que

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(\cup_n \{X_n = 0\}) = 1 - p.$$

- On a obtenu que $1 - p = \lim_n \mathbb{P}(X_n) = 0 = \lim_n g^n(0)$.
  Ceci définit une suite déterminée par une relation de récurrence. Comme on sait que $g(0) = \mathbb{P}(Y = 0) \geq 0$ et que $g(1) = \mathbb{E}[1^Y] = 1$, en utilisant les propriétés des suites déterminées par des relations de récurrence on sait que $1 - p$ est égal à la plus petite solution q_0 de $g(z) = z$.

$\star$ cette égalité est vraie car on peut montrer facilement que conditionnellement à $\{X_n = k\}$, chacune des k "lignées" est indépendante des autres et a la même loi qu'un processus de branchement. ■

Exercice 5 Correction Exercise 7 feuille 6. Vérifiez bien que la convergence a lieu *p.s.* et dans L^1 (en fait dans L^p avec $p < 2$). D'autre coté, trouver une sous-martingale telle que la convergence n'ait pas lieu dans L^2 (indication: similaire à la solution de l'exo 3 feuille 7).

Proof. On peut poser $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $X_n(\omega) = -2^{n/2}\mathbf{1}_{[0,2^{-n}[}(\omega)$. ■

Exercice 6 Montrez que toute sous-martingale positive d'espérance constante est une martingale.

Proof. On sait que $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$. D'autre part on sait que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}] - \mathbb{E}[M_n] = 0.$$

Ainsi on a que $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$ presque sûrement (voir Exerice 1 Feuille 7). ■