

Exo 7, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Les théorèmes de convergence.

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$, et on supposera que $(X_n)_n$ est une martingale adaptée à la filtration.

I Récap

Exercice 3 Trouver un exemple où $X_n \mapsto X$ presque sûrement, mais où $\mathbb{E}[X_n] \not\rightarrow \mathbb{E}[X]$.

Proof. Soit $(S_n)_n$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, X une variable aléatoire entière non-intégrable, et $\tau := \inf\{n \geq 0 : S_n = X\}$. Poser $X_n := S_{\tau \wedge n}$. ■

Exercice 4 Supposons que $X_n \geq 0$ et que τ est un temps d'arrêt (potentiellement infini). Comment peut-on définir X_τ ? Et si $(X_n)_n$ n'est pas forcément positive ?

Proof. Si $X_n \geq 0$, sur $\{\tau = \infty\}$ on peut poser $X_\tau = X_\infty = \lim_n X_n$, car la lim existe toujours d'après un corollaire du cours. Sans la condition de positivité on ne peut rien dire. ■

Exercice 5 Démontrez le lemme sur le critère d'uniforme intégrabilité suivant : Supposons que $X_n \mapsto X$ en $\mathbb{P}$ et que X soit intégrable. Montrez que la convergence a également lieu dans L^1 si et seulement si $(X_n)_n$ est U.I.. Remarquez que ceci correspond à une réciproque partielle de la propriété : convergence L^1 implique convergence en $\mathbb{P}$.

Proof. Supposons d'abord que $(X_n)_n$ est U.I. et posons $\epsilon > 0$ ainsi que le K_ϵ correspondant. On pourra supposer que $X = 0$ (pourquoi?). On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n| &\leq \mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{|X_n| \leq \epsilon} + \mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{\epsilon < |X_n| \leq K_\epsilon} + \mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{K_\epsilon < |X_n|} \\ &\leq \epsilon + K_\epsilon \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) + \epsilon \end{aligned}$$

Passer à la $\limsup_n$ permet de conclure.

Supposons maintenant que la convergence a lieu dans L^1 . On pourra supposer que $X = 0$ (pourquoi?). Soit $\epsilon > 0$. On sait que il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ on ait $\mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{|X_n| > a} \leq \mathbb{E}|X_n| \leq \epsilon$ pour tout $a > 0$. Pour les $N_\epsilon - 1$ premiers X_n on peut choisir K_ϵ tel que pour tout $n \leq N_\epsilon - 1$ on ait $\mathbb{E}|X_n|\mathbf{1}_{|X_n| > K_\epsilon} \leq \epsilon$. Poser $a = K_\epsilon$ dans la première partie permet de conclure. ■

Exercice 6 Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux martingales de carré intégrable. Montrez que

$$\mathbb{E} X_n Y_n - \mathbb{E} X_0 Y_0 = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(X_m - X_{m-1})(Y_m - Y_{m-1}).$$

Remarquez que ça peut permettre de calculer la covariance de X_n et Y_n .

Proof. Utilisez que

$$\mathbb{E}[X_n Y_n] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[(X_n + Y_n)^2] - \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[Y_n^2]).$$

■

II Pour ceux qui ont vu les chaînes de Markov

Exercice 7 Supposons que $(M_n)_n$ soit une chaîne de Markov homogène sur un espace dénombrable S et dont le noyau de transition est noté $p : S \times S \rightarrow [0, 1]$. On dit que $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ est p -harmonique si pour tout $x \in S$ on a $h(x) = \sum_S p(x, y)h(y)$.

Montrer qu'une telle fonction h bornée est p -harmonique si et seulement si $h(M_n)$ est une martingale adaptée à la filtration canonique de $(M_n)_n$.

Proof. Supposons d'abord que $(h(M_n))_n$ soit une martingale. On a alors par hypothèse

$$h(x) = \mathbb{E}[h(M_{n+1}) \mid M_n = x] = \mathbb{E}_x[h(M_1)] = \sum_{y \in S} p(x, y)h(y).$$

Ainsi h est p -harmonique.

Le même type de raisonnement permet de conclure pour l'autre sens.

■

Exercice 8 Supposons que $(M_n)_n$ soit une chaîne de Markov irréductible sur un espace dénombrable S . Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction non constante telle que pour tout $x \in S$,

$$\mathbb{E}_x[f(M_1)] \leq f(x).$$

Montrez que M_n est transiente.

Proof. La condition implique que $(f(M_n))_n$ est une sur-martingale, positive par hypothèse. Ainsi on peut utiliser le théorème de convergence pour les sur-martingales positives : il existe Y telle que $f(X_n) \mapsto Y$ presque sûrement.

On ne peut donc pas avoir que la chaîne de Markov est récurrente, sinon X_n prendrait successivement toutes ses valeurs, et $f(X_n)$ ne pourrait pas converger.

■