Exo 6, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Les modes de convergence

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$, et on supposera que X est une variable aléatoire, et que $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires adaptée à la filtration.

I Recap

Exercice 1 Montrez avec des contre-exemples que les implications suivantes sont fausses :

$$
\begin{aligned}
X_n \mapsto_n X \text{ en } \mathcal{L} &\not\Rightarrow X_n \mapsto_n X \text{ en } \mathbb{P} && (A)\\
X_n \mapsto_n X \text{ en } \mathbb{P} &\not\Rightarrow X_n \mapsto_n X \ p.s. && (B)\\
X_n \mapsto_n X \text{ en } \mathbb{P} &\not\Rightarrow X_n \mapsto_n X \text{ dans } L^p \quad (p \geq 1) && (C)\\
X_n \mapsto_n X \ p.s. &\not\Rightarrow X_n \mapsto_n X \text{ dans } L^p \quad (p \geq 1) && (D)\\
X_n \mapsto_n X \text{ dans } L^p \quad (p \geq 1) &\not\Rightarrow X_n \mapsto_n X \ p.s. && (E)
\end{aligned}
$$

Proof.

(A) On peut poser Y suivant une loi de Rademacher, et $X_{2n} = Y$ et $X_{2n+1} = -Y$.

(B) On se place en particulier sur l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}, m)$ avec m la mesure de Lebesgue, et on construit la suite de variables aléatoires $X_0 := a_0\mathbf{1}_{[0,1[}$, $X_1 := a_1\mathbf{1}_{[0,1/2[}$, $X_2 := a_2\mathbf{1}_{[1/2,1[}$, $X_3 := a_3\mathbf{1}_{[0,1/3[}$, $X_4 := a_4\mathbf{1}_{[1/3,2/3[}$, $X_5 := a_5\mathbf{1}_{[2/3,1[}$, $X_6 := a_6\mathbf{1}_{[0,1/4[}$, etc... Poser $a_n = 1$ fourni un contre-exemple avec $X = 0$.

(C) En posant $a_n = l(n)^{-1/p}$ où $l(n)$ est la longueur de l'intervalle non nul au rang n, le même contre-exemple fonctionne.

(D) Si les X_n ou bien X ne sont pas dans L^p, il ne peut y avoir convergence dans L^p.

(E) Le même contre-exemple que pour (B) fonctionne.

■

Exercice 2 Supposons que $X_n \mapsto_n X$ en $\mathcal{L}$, et que X soit une constante c presque sûrement. Montrez que dans ce cas $X_n \mapsto_n X$ en $\mathbb{P}$.

Proof. Pour des raisons de simplicité, on suppose que $X = c = 0$, mais la preuve s'adapte facilement au cas général.
En écrivant F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X (donc $F(x) = \mathbf{1}_{x\geq 0}$) on a, pour $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n < -\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = F_n(-\varepsilon) + 1 - F_n(\varepsilon)\\
&\mapsto_n F(-\varepsilon) + 1 - F(\varepsilon) = 0 + 1 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

■

Exercice 3 Supposons que

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$

Montrez que $X_n \mapsto_n X$ en $\mathbb{P}$, et (plus difficile), montrez que $X_n \mapsto_n X$ *p.s.*.
Déduisez-en que si $X_n \mapsto X$ en $\mathbb{P}$, il existe une sous-suite qui converge presque sûrement.

Proof. Pour la convergence en probabilité, il suffit de remarquer que la condition implique que $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \mapsto_n 0$.
Pour la convergence presque sûre il suffit d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli aux évènements $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$.
Pour le corollaire, par hypothèse, on sait que pour tout $k > 0$ il existe un rang N_k à partir duquel pour tout $n \geq N_k$ on a $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < 2^{-k}$. On peut donc construire une suite croissante $(n_k)_k$ telle que $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) < 2^{-k}$, et ainsi pouvoir appliquer ce qui précède à la suite $(X_{n_k})_k$. ■

II Cours

Exercice 5 Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}\ s.t. \quad \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon) < \delta.$$

Montrez que $X_n \mapsto_n X$ en $\mathbb{P}$, et (plus difficile), montrez que $X_n \mapsto_n X$ *p.s.*.

Proof. Pour la convergence en probabilité, il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon) \geq \sup_{m \geq n} \mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon)$.
Pour la convergence presque sûre, en reformulant l'hypothèse on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_n \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon) = 0.$$

Ainsi, d'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_n \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon) = \liminf_n \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon) \\
&\geq \mathbb{P}(\liminf_n \{\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\cup_k \cap_{n \geq k} \{\sup_{m \geq n} |X_n - X_m| > \varepsilon\}) \\
&= \mathbb{P}(\cup_k \cap_{n \geq k} \cup_{m \geq n} \{|X_n - X_m| > \varepsilon\}) \geq \mathbb{P}(\cap_n \cup_{m \geq n} \{|X_n - X_m| > \varepsilon\}) \\
&= \mathbb{P}(\limsup \{|X_n - X_m| > \varepsilon\})
\end{aligned}$$

QED ■

Exercice 6 [Doob]
Soient des constantes $1 < p < \infty$ et $a > 0$, soit $(X_n)_n$ une sous-martingale positive et le temps d'arrêt $\tau_a := \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n > a\}$. On note $S_n := \sup_{k \leq n} X_k$.
Montrez la version plus fine de l'**inégalité maximale de Doob** suivante,

$$\mathbb{P}(S_n > a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}].$$

Indice : Remarquez que pour tout $k \leq n$, on a : $a\mathbf{1}_{\tau_a = k} \leq \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k]\mathbf{1}_{\tau_a = k}$.
Utilisez ce résultat pour montrer l'**inégalité L^p de Doob** suivante,

$$\mathbb{E}[{S_n}^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[{X_n}^p].$$

Proof. On a, en suivant l'indication

$$a\mathbf{1}_{\tau_a=k} \le X_k\mathbf{1}_{\tau_a=k} \le \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k]\mathbf{1}_{\tau_a=k}.$$

Ainsi on peut calculer, en utilisant le point précédent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > a) = \mathbb{P}(\tau_a \le n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\tau_a = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\tau_a=k} \le \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k]\mathbf{1}_{\tau_a=k}\right] \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\tau_a=k} \mid \mathcal{F}_k]\right] = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\tau_a=k}] \\
&= \frac{1}{a}\,\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\tau_a\le n}]
\end{aligned}$$

On effectue alors le calcul suivant, en notant q le conjugué de p, c'est-à-dire le nombre tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^p] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(S_n > a^{1/p})da \le \int_0^\infty \frac{1}{a^{1/p}}\,\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\tau_{a^{1/p}}\le n}]da \\
&= \mathbb{E}\left[X_n \int_0^\infty \frac{1}{a^{1/p}}\mathbf{1}_{\tau_{a^{1/p}}\le n}da\right] = \mathbb{E}\left[X_n \int_0^\infty \frac{1}{a^{1/p}}\mathbf{1}_{{S_n}^p > a}da\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_n \int_0^{{S_n}^p} \frac{1}{a^{1/p}}da\right] = \mathbb{E}\left[X_n \frac{({S_n}^p)^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\right] \\
&= \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}\left[X_n {S_n}^{p-1}\right].
\end{aligned}$$

Enfin, appliquer l'inégalité de Hölder avec p et q permet de conclure. ■

Exercice 7 Vérifiez que la preuve du théorème de convergence des martingales dans L^2 reste valide si on suppose seulement que $(X_n)_n$ est une sous-martingale.
En déduire que le théorème est vraie pour une sur-martingale également.
Attention ! la convergence n'a plus lieu que presque sûrement, plus dans L^2.

Proof. La preuve s'effectue de la même manière, le lemme préliminaire devient seulement :
Pour tout $m \ge n$, on a

$$\mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] \le \mathbb{E}[X_m^2] - \mathbb{E}[X_n^2].$$

Ensuite, il suffit de noter que l'opposée d'une sur-martingale est une sous-martingale.
On peut remarquer que la convergence n'a plus lieu presque sûrement en considérant la suite de variables aléatoires de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$ définies par $X_n(x) := 2^{-n/2}\mathbf{1}_{[0,2^{-n}]}(x)$. ■