Exo 4, correction

Guillaume Woessner

Abstract

Corrigé de quelques exercices

Dans tout ce document, l'espace de probabilité considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, et $\tau := \tau_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ S_n = 1\}$. Montrez que

$$\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau>n}] \not\to 0,$$

en utilisant le théorème d'arrêt, et ensuite en n'utilisant pas le théorème d'arrêt.

Proof. Si on avait $\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau>n}] \mapsto 0$, les 2 autres conditions d'application du théorème d'arrêt étant vérifiées d'après le cours, on aurait $1 = \mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_0] = 0$. Ainsi par l'absurde on a montré que $\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau>n}] \not\to 0$.
Sans le théorème d'arrêt, on doit remarquer que $0 = \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau>n}] + \mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau\leq n}]$, et faire le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau>n}] &= -\,\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau\leq n}] = -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau=k}] \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n)\mathbf{1}_{\tau=k}] \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[S_k \mathbf{1}_{\tau=k}] - \mathbb{E}[(X_{k+1} + \cdots + X_n)\mathbf{1}_{\tau=k}] \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[1.\mathbf{1}_{\tau=k}] - 0 \qquad \text{par indépendance} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\tau = k] = -\mathbb{P}(\tau \leq n) \mapsto -1.
\end{aligned}$$

■

Exercice 2 Montrez que le corollaire suivant du théorème d'arrêt est vrai.
Soit $(X_n)_n$ une martingale. Si un temps d'arrêt τ est presque sûrement fini, et il existe une variable aléatoire intégrable M telle que pour tout n,

$$|X_{n\wedge\tau}| \leq M \qquad as.$$

Alors $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Remarque 1. Ce corollaire n'est pas dans le cours, mais il est très proche du point ii) du Corollaire 3.4 du cours.

Proof. Il s'agit de montrer les conditions ii) et iii) du théorème d'arrêt.

ii) On a $\mathbb{E}[|X_T|] = \mathbb{E}[\lim_n |X_{n\wedge\tau}|] = \lim_n \mathbb{E}[|X_{\tau\wedge n}|] \leq \lim_n \mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[M] < \infty$, la deuxième égalité étant vraie grâce à l'hypothèse et au théorème de convergence dominée.

iii) On a $|\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau\wedge n}]| \leq \mathbb{E}[|S_n| \mathbf{1}_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[|S_{\tau\wedge n}| \mathbf{1}_{\tau\wedge n}] \leq \mathbb{E}[M \mathbf{1}_{\tau\wedge n}]$. Or $M\mathbf{1}_{\tau\wedge n} \mapsto 0$ par l'Exercice 3, et est dominée par M intégrable par hypothèse. Ainsi par le théorème de convergence dominée à nouveau on a bien que $\mathbb{E}[S_n \mathbf{1}_{\tau\wedge n}] \mapsto 0$.

Ainsi le théorème d'arrêt s'applique et le résultat s'ensuit. ■

Exercice 2' Montrez que le corollaire suivant du théorème d'arrêt est vrai.
Soit $(X_n)_n$ une martingale. Si un temps d'arrêt τ est intégrable, et il existe un réel C tel que pour tout n

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X_{n-1}| \;\middle|\; \mathcal{F}_{n-1}\right] \leq C \qquad as.$$

Alors $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Remarque 2. Etant donné que $\mathbb{E}\left[|X_n - X_{n-1}| \;\middle|\; \mathcal{F}_{n-1}\right] \leq C$ est impliqué par $|X_n - X_{n-1}| \leq C$, cet exercice est bien une démonstration du point iii) du Corollaire 3.4 du cours.

Proof. On réécrit le processus arrêté $X_{\tau\wedge t}$ par

$$X_{\tau\wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} (X_k - X_{k-1}).$$

Ainsi on a $|X_{\tau\wedge n}| \leq M$ pour tout n, où

$$M := |X_0| + \sum_{k=1}^{\tau} |X_k - X_{k-1}| = |X_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X_{k-1}| \, \mathbf{1}_{\tau+1>k}.$$

Et par le théorème de convergence monotone on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k - X_{k-1}| \, \mathbf{1}_{\tau+1>k}] \\
&= \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|X_k - X_{k-1}| \, \mathbf{1}_{\tau>k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}]\right] \\
&= \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|X_k - X_{k-1}| \mid \mathcal{F}_{k-1}] \mathbf{1}_{\tau>k-1}\right] \\
&\leq \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=1}^{\infty} C \, \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau>k+1}] \\
&= \mathbb{E}[|X_0|] + C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau \geq k] = \mathbb{E}[|X_0|] + C \, \mathbb{E}[\tau] < \infty.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi que le processus $|X_{\tau\wedge n}|$ est dominé par une variable M intégrable, et d'après le théorème de convergence dominée on a alors que $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\lim_n X_{\tau\wedge n}] = \lim_n \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}]$.
Ainsi, comme on sait que le processus $X_{\tau\wedge n}$ est une martingale, on sait que $\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$. On peut alors conclure. ■

Exercice 4 Soit $a, b \in \mathbb{N}^\times$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \;:\; S_n \notin [-a, b]\}$. Utilisez le fait que $S_n^2 - n$ est une martingale (*cf* feuille Exo 2) pour montrer que $\mathbb{E}\,\tau = ab$.

Remarque 3. Je vais donner 2 façons de résoudre cet exercice. La première consiste à montrer la seule chose qui a été admise dans le cours, c'est-à-dire que $\mathbb{E}\,\tau < \infty$. La seconde est une façon alternative de faire l'exercice, plus simple et indépendante de ce qui a été fait en cours.

Proof. On rappelle qu'on a montré en cours que $\tau < \infty$ presque sûrement.

V1 Montrons que $\mathbb{E}\,\tau < \infty$. On définit les évènements $A_n := \{X_i = 1 \ \forall n(a+b)+1 \leq i \leq (n+1)(a+b)\}$. Les A_n sont des évenements indépendants d'une même probabilité $p > 0$, et on définit $\tau' := \inf\{n \geq 0 \ : \ A_n \text{ se réalise}\}$. On a que $\tau \leq (a+b)\tau'$ (voir la preuve du cours que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ pour plus de détails). Or τ' suit une loi géométrique (nombre d'essais avant d'obtenir un succès lors d'une succession d'épreuves de Bernouilli *iid*), et une loi géométrique admet une espérance finie, QED.

V2 Soit $n \in \mathbb{N}^\times$, alors $\tau \wedge n$ est un temps d'arrêt borné, ainsi par le point i) du Corollaire 3.4 du théorème d'arrêt du cours on sait que $\mathbb{E}[S_{\tau\wedge n}^2 - \tau\wedge n] = \mathbb{E}[S_0^2 - 0] = 0$, ainsi $\mathbb{E}[S_{\tau\wedge n}^2] = \mathbb{E}[\tau\wedge n]$. Par le théorème de convergence monotone on sait que $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[\lim_n \tau \wedge n] = \lim_n \mathbb{E}[\tau \wedge n]$. D'autre part, $S_{\tau\wedge n} \mapsto_n S_\tau$ presque sûrement, et $S_{\tau\wedge n}^2 \leq (a \vee b)^2$ pour tout n, donc par le théorème de convergence dominée on a également $\mathbb{E}[S_\tau^2] = \mathbb{E}[\lim_n S_{\tau\wedge n}^2] = \lim_n \mathbb{E}[S_{\tau\wedge n}^2]$.
Recollons les morceaux, et on obtient $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[S_\tau^2]$.
Finalement, il reste à calculer $\mathbb{E}[S_\tau^2]$. Or on a vu en cours que S_τ est une variable aléatoire prenant la valeur $-a$ avec probabilité $\frac{b}{a+b}$ et la valeur b avec probabilité $\frac{a}{a+b}$. Ainsi un bref calcul permet d'obtenir que $\mathbb{E}[S_\tau^2] = ab$.

$\blacksquare$