Exo 12, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Le mouvement brownien (MB), suite.

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, et on supposera que $(B_t)_t$ est un mouvement brownien adapté à la filtration.

Exercice 1 Montrez que

$$\mathbb{P}(\limsup B_t = -\liminf B_t = \infty) = 1.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(\forall \varepsilon > 0, \ : \ \exists s, t \in [0, \varepsilon], \ B_s > 0, B_t < 0) = 1.$$

Proof. Soit le processus discret $X_n := B_n$. On a que $X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - X_{k-1}$, et chaque $X_k - X_{k-1}$ est *i.i.d.* et suit une $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi on peut dire que $(X_n)_n$ est une marche aléatoire de pas $\mathcal{N}(0,1)$, et on a déjà vu que

$$1 = \mathbb{P}(\limsup X_n = -\liminf X_n = \infty) \leq \mathbb{P}(\limsup B_t = -\liminf B_t = \infty).$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le résultat précédent au processus obtenu par inversion du temps $\tilde{B}_t := tB_{\frac{1}{t}}$, qui est toujours un mouvement brownien.
voir remarque piazza si on ne dispose pas du resultat sur la MA gaussienne. ■

Exercice 2 Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une famille orthonormée de fonctions de $L^2([0,1], \mathcal{B}, dt)$ donnée par $\varphi_n(t) := \sqrt{2}\sin(\pi n t)$. Montrez que les variables aléatoires $\langle \varphi_n \mid B \rangle_2$ où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_2$ est le produit scalaire usuel de $L^2[0,1]$, sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ pour un certain σ_n.
En déduire une expression de B_t dans une base comprenant les φ_n. Vérifiez la convergence de la série de Fourier que vous avez définie dans $L^2[0,1]$.

Proof. En approximant l'intégrale par une somme de Riemann, on a que

$$\langle \varphi_n \mid B \rangle_2 = \int_0^1 \varphi_n(t) B(t) dt = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) B\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi, étant une limite presque sûre de lois normales, $\langle \varphi_n \mid B \rangle_2$ est encore une loi normale. La famille $(\langle \varphi_n \mid B \rangle_2)_n$ est donc un processus gaussien, par Fubini il est centré, et on calcule sa matrice de covariance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \varphi_n \mid B\rangle_2 \langle \varphi_m \mid B\rangle_2] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi_m(s) B_t B_s ds dt\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi_m(s)\,\mathbb{E}[B_t B_s] ds dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi_m(s)(s\wedge t) ds dt \\
&= 2\int_0^1 \int_0^t s\varphi_n(t)\varphi_m(s) ds dt \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{(\pi n)^2}\delta_{nm}.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme une base orthonormée de $L^2[0,1]$ est donnée par $\{\varphi_n \;:\; n\geq 1\}\cup\{\sqrt{\frac{3}{10}}(2t-1)\}\cup\{1\}$, et que $B_0 = 0$ et $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, on peut écrire B_t de la manière suivante, où les $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ sont *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$B_t = \epsilon_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\epsilon_n \varphi_n(t). \tag{.1}$$

Vérifions que les sommes partielles associées à (**??**) convergent bien presque sûrement dans $L^2[0,1]$ vers un mouvement brownien.
On calcule

$$\mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[(\epsilon_0 t)^2] + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\pi n}\epsilon_n\varphi_n(t)\right)^2\right] = t^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(\pi n)^2}\sin^2(\pi n t).$$

Or, en calculant la série de Fourier associée à la fonction $t(1-t)$ et en linéarisant le $\sin^2$, on remarque que la somme correspond à la série de Fourier de $t(1-t)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[B_t^2] = t^2 + t(1-t) = t.$$

On a donc bien que la convergence dans $L^2[0,1]$ vers un processus gaussien centré de variance t, c'est-à-dire un mouvement brownien. ∎

Exercice 3 Utilisez l'exercice 2 de la feuille 11 pour résoudre l'EDP suivante de condition initiale $f\in L^1(\mathbb{R})$ donnée

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u, \qquad f(0,\cdot) = f.$$

Proof. On définit $u(t,x) := \mathbb{E}[f(x+B_t)]$. En notant p_t la densité de B_t, on obtient

$$u(t,x) := \mathbb{E}[f(x+B_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)p_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(z)p_t(z-x)dz.$$

En utilisant l'exercice 2 de la feuille 11, on peut calculer

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)u(t,x) = (\partial_t-\Delta)\int_{\mathbb{R}} f(z)p_t(z-x)dz &= \int_{\mathbb{R}} f(z)(\partial_t-\Delta)p_t(z-x)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)0dz = 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut voir que bien sûr $u(0,x) = \mathbb{E}[f(x+0)] = f(x)$, ce qui est cohérent avec le fait que, formellement, en utilisant toujours les résultats de l'exercice 2 de la feuille 11,

$$u(0,x) = \lim_{t\mapsto 0} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(z) \lim_{t\mapsto 0} p_t(z-x)dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\delta_0(z-x)dz = f(x).$$

■

Exercice 4 Soit $\bar{B}_t$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 2$, et O une matrice orthogonale. Montrez que $O\bar{B}_t$ est encore un mouvement brownien d-dimensionnel.
Si O dépend de t et de ω, le résultat tient-il encore ? Si oui, sous quelles conditions ?
Trouver une caractérisation du mouvement brownien d-dimensionnel analogue à celle de la dimension 1 vue en cours.

Proof. Comme $O\bar{B}_t$ est toujours un processus gaussien centré (pourquoi?), il suffit de calculer la matrice de covariance. On a pour $i,j = 1,\dots,d$,

$$\mathbb{E}[(O\bar{B}_t)_i(O\bar{B}_t)_j] = \mathbb{E}[((O\bar{B}_t)(O\bar{B}_t)^T)_{ij}] = (\mathbb{E}[O\bar{B}_t\bar{B}_t^T O^T])_{ij} = (O\,\mathbb{E}[\bar{B}_t\bar{B}_t^T]O^T)_{ij}.$$

Or $\mathbb{E}[\bar{B}_t\bar{B}_t^T] = tId$, ainsi

$$\mathbb{E}[(O\bar{B}_t)_i(O\bar{B}_t)_j] = (O\ t.IdO^T)_{ij} = t(OO^T)_{ij} = t(Id)_{ij} = t\delta_{ij}.$$

Donc $O\bar{B}_t$ est encore un mouvement brownien d-dimensionnel.
Si O dépend de t, le même raisonnement fonctionne toujours. De même, si O_t dépend aussi de ω, en supposant que O et $\bar{B}_t$ sont indépendants, alors la proposition reste vraie. On peut prendre par exemple le cas où A et B sont des rotations deterministes, et $O_t(\omega) = \delta_Y A + (1-\delta_Y)B$ où Y est une variable de Rademacher indépendante de B_t. En conditionnant par les valeurs de Y, un raisonnement similaire fonctionne.
Si O_t et B_t ne sont pas indépendants, la proposition est fausse, car on peut imaginer que par exemple en dimension 2, moralement, la rotation O_t "suive" celle du mouvement brownien, et maintienne celui-ci sur la ligne $y = 0$.
Une caractérisation du mouvement brownien d-dimensionnel serait : un processus gaussien $\bar{B}_t$ tel que les variables $\bar{B}_t - \bar{B}_s$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_s$ et de loi $\mathcal{N}^d(0, t-s)$.
Notez que la caractérisation suivante existe aussi : un processus gaussien $\bar{B}_t := (B_t^1, \dots, B_t^d)$ invariant par rotation et tel que les B^i soient des processus indépendants et à accroissements indépendants. ■