Exo 11, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Le mouvement brownien (MB).

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, et on supposera que $(B_t)_t$ est un mouvement brownien adapté à la filtration.

Exercice 1 Soient $(X_t)_t$ et $(Y_t)_t$ deux MB.
Vérifiez que les deux processus ont les mêmes lois fini-dimensionnelles.

Proof. Soient $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, et on veut montrer que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$. Par bijection, ceci est équivalent à montrer que

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim (Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}).$$

Or ces deux derniers vecteurs ont bien la même loi, la loi donnée par n lois normales indépendantes qu'on écrit

$$\mathcal{N}(0, t_1) \otimes \mathcal{N}(0, t_2 - t_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1}).$$

$\blacksquare$

Exercice 2 Calculez la densité de B_t pour un $t > 0$, et montrez qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t p(t,x) - \frac{1}{2}\Delta p(t,x) = 0.$$

Donnez un sens à $p_0(x)$.

Proof. On sait que $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, ainsi on a tout de suite que

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Un calcul direct montre alors bien que p vérifie l'équation de la chaleur.
Enfin, on calcule pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction-test la quantité

$$\lim_{t\mapsto 0} \int_{\mathbb{R}} p(t,x) f(x) dx =^\star f(0),$$

ce qui indique qu'on peut attribuer à $p(0,x)$ le sens de δ_0.

L'égalité $\star$ est vraie car on peut faire le raisonnement d'analyse suivant :
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ pour $x \in [-\eta, \eta]$. Soit T tel que

$\int_{-\eta}^{\eta} p_t(x)dx > 1 - \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$ pour $t \geq T$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} p_t(x) f(x) dx - f(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} p_t(x)(f(x) - f(0)) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} p_t(x)|f(x) - f(0)|dx \\
&\leq \int_{[-\eta,\eta]} p_t(x)|f(x) - f(0)|dx + \int_{[-\eta,\eta]^c} p_t(x)|f(x) - f(0)|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} p_t(x)\varepsilon dx + 2\|f\|_\infty \int_{[-\eta,\eta]^c} p_t(x)dx \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Exercice 3 Montrez que, pour tout $T > 0$, le processus $(\tilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ défini par

$$\tilde{B}_t := B_{T-t} - B_T,$$

est un MB.

Proof. Pour montrer qu'un processus est brownien, on a 3 façons de procéder :

- montrer que les 4 propriétés fondamentales du début du cours sont vérifiées,
- montrer que le processus est continu, et a les mêmes lois fini-dimensionnelles que le mouvement brownien,
- montrer qu'il s'agit d'un processus gaussien (toute combinaison linéaire est une gaussienne), et montrer que son espérance est nulle et que sa covariance est $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min(s,t)$, enfin il ne faut pas oublier de montrer la continuité.

Ici, le plus simple est de prendre la troisième caractérisation. C'est encore bien entendu un processus gaussien centré et continu, il s'agit donc seulement de calculer sa covariance. On prend donc $s < t$ et on calcule,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\tilde{B}_{T-t} - \tilde{B}_T)(\tilde{B}_{T-s} - \tilde{B}_T)] &= \mathbb{E}[\tilde{B}_{T-t}\tilde{B}_{T-s}] - \mathbb{E}[\tilde{B}_T\tilde{B}_{T-s}] - \mathbb{E}[\tilde{B}_{T-t}\tilde{B}_T] + \mathbb{E}[\tilde{B}_T^2] \\
&= T - t - (T-s) - (T-t) + T \\
&= s = \min(s,t).
\end{aligned}$$

■

Exercice 4 On définit l'espace

$$H^1 := \{g \in L^2[0,1] \cap C[0,1] \ : \ g(0) = 0, \ g \text{ existe pp et } \int_0^1 |g'(t)|^2 dt < \infty\},$$

muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle := \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. On admet qu'il s'agit d'un espace de Hilbert. On définit également pour $n \in \mathbb{N}^\times$ les fonctions sur $[0,1]$ par $\psi_0(t) = t$ et pour $k = 1, 3, 5, \ldots, (2^n - 1)2^{-n}$, les fonctions linéaires par morceaux telles que

$$\psi_{n,k}(t) = \left| \begin{array}{ll} 2^{-\frac{n+1}{2}} & \text{si } t = k2^{-n} \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{D}_n. \end{array} \right.$$

Montrez que la famille $(\psi_{n,k})_{n,k}$ forme un système orthonormé et complet de H^1.
Indication : *Utilisez le fait que la dérivée de toute fonction de H^1 est dans L^2.*

Montrez ensuite que, si chaque $X_{n,k}$ est une $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante, on a

$$B_t^N := \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_{n,k}(t) X_{n,k} \longmapsto_{N \mapsto \infty} B_t,$$

où B est un mouvement brownien, et où la convergence a lieu pour chaque $t \in [0,1]$ dans $L^2(\mathbb{P})$.
Indication : *A quel objet du cours correspond la variable $\sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_{n,k}(t) X_{n,k}$?*

En déduire que si $(X_t)_t$ et $(Y_t)_t$ sont deux MB, alors ils induisent la même loi sur $C[0,1]$.
Indication : *Etudiez le processus linéaire par morceaux défini par les $\{X_t \ : \ t \in \mathcal{D}_N\}$ où $\mathcal{D}_N$ désigne les diadiques d'ordre N.*

Proof. On montre facilement que chaque $\psi_{n,k} \in H^1$ et que leur dérivée existe presque partout et est la fonction constante par morceaux telle que

$$\psi'_{n,k}(t) := 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{2^{-n}}, \frac{k}{2^{-n}}[}(t) - 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{-n}}, \frac{k+1}{2^{-n}}[}(t).$$

Par calcul direct sur les $\psi'_{n,k}$, on montre facilement que la famille $(\psi_{n,k})_{n,k}$ forme un système orthonormé de $L^2[0,1]$.
De plus, comme H^1 peut être vu comme un sous-ensemble de $L^2[0,1]$ (plus précisément, on a que $\{g' \ : \ g \in H^1\}$ se plonge dans $L^2[0,1]$ avec la même norme), les questions de densité peuvent être traitées comme si on était sur $L^2[0,1]$. Ainsi, la famille est également complète car en recomposant les $\psi'_{n,k}$, elle permet d'obtenir les fonctions indicatrices de tout intervalle dyadique (c'est-à-dire de la forme $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$) ; puis par densité des dyadiques ont obtient toutes les fonctions indicatrices d'intervalle ; et enfin on sait bien que ceci permet de retrouver toutes les fonctions de $L^2[0,1]$.

Pour montrer la convergence de la suite B^N vers le mouvement brownien, il existe 2 manières de procéder.

- Pour la première façon de procéder, on peut se contenter de remarquer que les variables $\sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_{n,k}(t) X_{n,k}$ correspondent très exactement aux variables h_n du cours. Ainsi on peut directement utiliser le résultat du cours, et conclure la convergence du processus B^N vers le mouvement brownien.

- Pour être exhaustif, on présente également une autre façon de procéder, qui se passe du résultat du cours, mais qu'on peut passer outre en première lecture.
  Comme on a vu qu'ils constituent une base de Hilbert de H^1, pour la simplicité des notations, on est donc maintenant justifiés à renoter les $\psi_{n,k}$ par ψ_i pour $i = 2^n + k$.
  Soit $t \in [0,1]$, et montrons que d'abord que la suite $(B_t^N)_N$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$. On calcule pour $0 \leq M < N$,

  $$\mathbb{E}[(B_t^N - B_t^M)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=M+1}^{N} \psi_i(t) X_i\right)^2\right] = \sum_{i=M+1}^{N} \psi_i(t)^2$$

  Or, en notant $e_t \in H^1$ la primitive de $\mathbf{1}_{[0,t]}$, on a

  $$\psi_i(t)^2 = \left(\int_0^t \psi'_i(s) ds\right)^2 = \left(\int_0^1 \psi_i(s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) ds\right)^2 = \langle \psi_i \mid e_t \rangle^2.$$

  Ainsi, comme on vient de montrer que la famille $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H^1, par l'égalité de Parseval la somme $\sum_i \langle \psi_i \mid e_t \rangle^2$ converge vers $\|e_t\|_{H^1} < \infty$, et on a bien montré

que la suite $(B_t^N)_N$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc elle converge vers une limite notée
$$B_t := \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t) X_i.$$
Il s'agit maintenant de montrer que le processus $(B_t)_t$ qu'on vient de définir est gaussien. Comme dans l'exercice précédent, il faut choisir une stratégie d'attaque, et on va à nouveau choisir la troisième. Or, il est immédiat que le processus est gaussien (en tant que limite de processus gaussiens), et centré.
Montrons maintenant que sa covariance est bien $Cov(s,t) = \min(s,t)$. Faisons un raisonnement similaire au précédent et calculons,
$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t)\psi_i(s) = \sum_i \langle \psi_i \mid e_t \rangle \langle \psi_i \mid e_s \rangle = \langle e_t \mid e_s \rangle = \min(s,t).$$
Enfin, il ne reste qu'à montrer la continuité du processus $(B_t)_t$.
On calcule, en utilisant le Lemme **??**,
$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_i(t) X_i \right| &\leq \max_{k=0,\dots,2^n-1} |X_{n,k}| \,.\, \| \max_{k=0,\dots,2^n-1} \psi_{n,k} \|_\infty \qquad \text{car les } \psi_{n,k} \text{ sont à support disjoints} \\ &\leq 2^{-\frac{n+1}{2}} M \sqrt{n} \end{aligned}$$
Or $2^{-\frac{n+1}{2}} M\sqrt{n}$ est le terme général d'une série convergente indépendante de $t \in [0,1]$. Ainsi, la convergence de $B_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_i(t) X_i \right)$ est presque sûrement normale, et par continuité des $\psi_i(t)$, le processus B_t est bien continu.

Pour répondre à la dernière question, on considère $\{X_t \ : \ t \in \mathcal{D}_N\}$ où $\mathcal{D}_N$ désigne les diadiques d'ordre N. D'après les propriétés du mouvement brownien, ce processus a la même loi que $\sum_{n=0}^N h_n$, où h_n est la même variable que celle du cours. Ainsi on a, pour $t \in \mathcal{D}_N$,
$$X_t \sim \sum_{n=0}^{N} h_n(t) \sim \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_{n,k}(t) X_{n,k} \sim B_t^N.$$
On conclut alors en invoquant l'unicité de la convergence en loi de B_t^N, la continuité de X_t et la densité de $\mathcal{D} = \cup_N \mathcal{D}_N$ ∎

Lemma .1. Soit $(X_{n,k})_{n \geq 0, k=0,\dots,2^n-1}$ une suite *i.i.d.* de variables $\mathcal{N}(0,1)$.
Il n'existe presque sûrement qu'un nombre fini d'évènements
$$B_n := \{ \max_{k=0,\dots,2^n-1} |X_{n,k}| > 2\sqrt{n} \},$$
qui se réalisent en même temps.
Ainsi, il existe une variable aléatoire M telle que
$$\max_{k=0,\dots,2^n-1} |X_{n,k}| \leq M\sqrt{n},$$
presque sûrement.

Proof. On calcule
$$\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\{|X_{n,k}| > 2\sqrt{n}\} \leq 2^n \mathbb{P}(|X_{0,0}| > 2\sqrt{n}) \leq^\star 2^n e^{-2n}.$$
Et comme $\sum_n 2^n e^{-2n}$ converge, on conclut avec le Lemme de Borel-Cantelli.

L'inégalité * provient de l'inégalité vraie pour toute $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
$$\mathbb{P}(X > x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
∎