Exo 10, corrigé

Guillaume Woessner

Abstract

Le mouvement brownien (MB).

Dans tout ce document, l'espace de probabilité filtré considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, et on supposera que $(B_t)_t$ est un mouvement brownien adapté à la filtration.

Exercice 1 Dans le cours on a construit le mouvement brownien sur $[0,1]$. Dans cet exercice on va l'étendre à $[0,\infty[$.
Soient, pour $i = 1, 2, \dots$, des MB indépendants $(B_t^i)_{t\in[0,1]}$. On définit alors le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ par

$$B_t := \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor} B_1^i + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor+1}.$$

Montrez que le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est bien un mouvement brownien sur $[0,\infty[$.

Proof. On va vérifier que les 4 propriétés du MB sont bien vérifiées.

(1) On a bien évidemment $B_0 = 0$, car $\sum_{i=1}^{0} = 0$ par définition.

(2) Remarquons d'abord que, pour $s < t$,

$$B_t - B_s = \sum_{i=\lfloor s\rfloor+1}^{\lfloor t\rfloor} B_1^i + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor+1} - B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor+1} \tag{.1}$$

Ensuite, pour $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, il s'agit de montrer que $(B_{t_3} - B_{t_2}) \amalg (B_{t_2} - B_{t_1})$. On peut procéder par disjonction de 4 cas, selon que $\lfloor t_1\rfloor < \lfloor t_2\rfloor < \lfloor t_3\rfloor$, ou que l'une ou les deux inégalités soient des égalités. On présente ici le premier cas.
Dans ce cas on a immédiatement que $\sum_{i=\lfloor t_1\rfloor+1}^{\lfloor t_2\rfloor} B_1^i$ et $-B_{t_1-\lfloor t_1\rfloor}^{\lfloor t_1\rfloor+1}$ sont indépendants de $B_{t_3} - B_{t_2}$.
Le terme restant $B_{t_2-\lfloor t_2\rfloor}^{\lfloor t_2\rfloor+1}$ est lui indépendant de $B_1^{\lfloor t_2\rfloor+1} - B_{t_2-\lfloor t_2\rfloor}^{\lfloor t_2\rfloor+1}$, ainsi que de tous les autres termes apparaissant dans $B_{t_3} - B_{t_2}$.
On a donc bien l'indépendance recherchée dans le premier cas, et je vous laisse faire les autres vous-même............

(3) On veut montrer que pour $s \leq t$, on a bien $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Or en réécrivant (**??**) on obtient, si $\lfloor s\rfloor < \lfloor t\rfloor$ (l'autre cas est à nouveau laissé à l'initiative du lecteur),

$$B_t - B_s = (B_1^{\lfloor s\rfloor+1} - B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor+1}) + \sum_{i=\lfloor s\rfloor+2}^{\lfloor t\rfloor} B_1^i + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor+1},$$

ce qui correspond à une somme de gaussiennes indépendantes

$$\mathcal{N}(0, 1-(s-\lfloor s\rfloor)) + \sum_{i=\lfloor s\rfloor+2}^{\lfloor t\rfloor} \mathcal{N}(0,1) + \mathcal{N}(0, t-\lfloor t\rfloor) \quad \sim \quad \mathcal{N}(0, t-s).$$

(4) Chaque MB B^i est continu sur un ensemble presque sûr $\Omega_i \subset \Omega$, ainsi B est bien continu sur $\cap_i \Omega_i$, qui est lui aussi presque sûr.

■

Exercice 2 Soit $X := (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien. Montrez qu'il est caractérisé par son vecteur d'espérance $m_i := \mathbb{E}[X_i]$ et sa matrice de covariance $Cov(i,j) := \mathbb{E}[X_i X_j]$.

Proof. On calcule la fonction caractéristique du vecteur X, donnée par

$$\varphi_X(u) := \mathbb{E}\left[e^{i\langle u \mid X\rangle}\right] = \exp\left(i\,\mathbb{E}[\langle u \mid X\rangle] - \frac{1}{2}Var(\langle u \mid X\rangle)\right).$$

Or, $\mathbb{E}[\langle u \mid X\rangle] = \langle u \mid \mathbb{E}[X]\rangle = \langle u \mid m\rangle$, et

$$\begin{aligned} Var(\langle u \mid X\rangle) &= \mathbb{E}\left[(\langle u \mid X\rangle)^2\right] - \mathbb{E}[(\langle u \mid m\rangle)^2] \\ &= \sum_{ij} u_i u_j\,\mathbb{E}[X_i X_j] = u^t.Cov.u. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction caractéristique, et donc la loi, du vecteur gaussien X est bien caractérisée par espérance et matrice de covariance. ■

Exercice 3 Trouver un processus $(W_t)_{t\in[0,1]}$, qui a les mêmes lois marginales que $(B_t)_{t\in[0,1]}$ mais qui n'est pas continu.

Proof. On peut prendre $W_t := B_t + \delta_Y(t)$ avec $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ indépendante, comme dans la Feuille 9 Exercice 4. ■

Exercice 4 Calculer $\mathbb{E}[B_5 \mid B_1]$ et $\mathbb{E}[B_5^2 \mid B_1]$.

Proof. On a

$$\mathbb{E}[B_5 \mid B_1] = \mathbb{E}[B_5 - B_1 \mid B_1] + B_1 = B_1,$$

et

$$\mathbb{E}[B_5^2 \mid B_1] = \mathbb{E}[(B_5 - B_1)^2 + 2B_5B_1 - B_1^2 \mid B_1] = \mathbb{E}[(B_5 - B_1)^2] + 2B_1^2 - B_1^2 = 4 + B_1^2.$$

■

Exercice 5 Fixons $t > 0$ et posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \le i < 2^n$ des entiers, $t_i := t\frac{i}{2^n}$.
Montrez que

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \;\mapsto t,$$

dans $L^2(\mathbb{P})$ et *presque sûrement.*

Proof. Commençons par la preuve de la convergence L^2.
On note, pour tout n et i, $Y_i^n := (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \frac{t}{2^n}$. A n fixé les $(Y_i^n)_i$ sont indépendantes et centrées, et vérifient $Var(Y_i^n) = \mathbb{E}[(Y_i^n)^2] =^\star 2(\frac{t}{2^n})^2$. Ainsi on calcule,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} Y_i^n\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{2^n-1} Var(Y_i^n) \\ &= 2\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = \frac{2}{2^n}t^2 \quad \longrightarrow_n \quad 0. \end{aligned}$$

Passons maintenant à la convergence presque sûre.
On a vu que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} Y_i^n\right)^2\right] = \frac{t^2}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Chebychev

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=0}^{2^n-1} Y_i^n\right| > \frac{1}{n}\right) \leq \frac{t^2 n^2}{2^{n-1}},$$

qui est le terme générale d'une série sommable en $n \geq 1$. Ainsi d'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe presque sûrement un rang N à partir duquel pour $n \geq N$ on ait

$$\left|\sum_{i=0}^{2^n-1} Y_i^n\right| \leq \frac{1}{n},$$

ce qui implique bien la convergence presque sûre. ■

Exercice 8 Calculer $\mathbb{P}(B_1 > 0 \cap B_2 > 0)$ et $\mathbb{P}(B_1 > 0 \cap B_2 < 0)$.

Proof. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1 > 0 \cap B_2 > 0) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(B_2 > 0 \cap B_1 > 0 \mid B_1 = y) d\mathbb{P}(B_1 = y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbb{P}(B_2 > 0 \mid B_1 = y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbb{P}(B_2 - B_1 > -y \mid B_1 = y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbb{P}(B_2 - B_1 > -y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dy + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-y}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{0}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dy \\
&= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} . \left(\frac{1}{2} \mathrm{erf}(\sqrt{2} y)\right) dy \\
&= \frac{1}{4} + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \mathrm{erf}(x) dx,
\end{aligned}$$

où erf est la fonction d'erreur de Gauss.
Pour le deuxième calcul, il faut utiliser que

$$\mathbb{P}(B_1 > 0 \cap B_2 > 0) + \mathbb{P}(B_1 > 0 \cap B_2 < 0) = \mathbb{P}(B_1 > 0) = \frac{1}{2}.$$

■

$\star$ il faut utiliser que si $B \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[B^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}$.